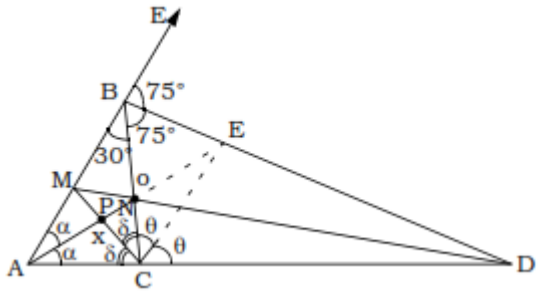
AMANECIDA DE MATEMÁTICA

SOLUCIONARIO DE GEOMETRÍA

01.

La figura muestra al triángulo dado (ABC) y a sus bisectrices interior ($\overline{AN}$) y exterior ($\overline{BD}$) con la medida del ángulo exterior CBE.



Prolongado $\overline{AN}$ se obtiene el ex-centro E y entonces $\overrightarrow{CE}$ es otra bisectriz exterior. Al parecer $\overline{CM}$ es bisectriz interior del triángulo ABC y para comprobar esto debe demostrarse que:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{MA}{MB}$$ (Teorema de la bisectriz)

Aplicando el Teorema de Ceva en el triángulo ABD se obtiene:

$$AM \times BE \times DC = MB \times ED \times CA \quad ...(1)$$

Usando el teorema de la bisectriz interior en el triángulo BCD resulta:

$$\frac{BC}{CD} = \frac{BE}{ED} \rightarrow BE \times DC = BC \times ED \quad ...(2)$$

Dividiendo miembro a miembro (1) ÷ (2)

$$\frac{AM \times \cancel{BE} \times \cancel{DC}}{\cancel{BE} \times \cancel{DC}} = \frac{MB \times \cancel{ED} \times CA}{BC \times \cancel{ED}}$$

Finalmente se obtiene:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{CA}{CB}$$

Con esto se concluye que $\overline{CM}$ es bisectriz interior, entonces haciendo que m ∠ ACM = m ∠ MCB = δ, puede escribirse en APC y ABC:

$x + \alpha + \delta = 180°$

$2\alpha + 2\delta + 30° = 180°$

Por tanto:

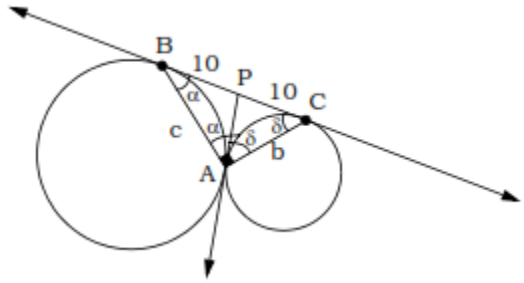
$x = 180 - (\alpha + \delta) \ \wedge \ \alpha + \delta = 75°$

$\rightarrow \quad x = 180 - 75°$

$x = 105°$

RESPUESTA: B

02.



Como PB = PA = PC los triángulos PAB y PAC son isósceles y entonces en el triángulo ABC:

$2\alpha + 2\delta = 180°$

$\alpha + \delta = 90°$

Como m ∠ ABC = α + δ;

m ∠ ABC = α + δ = 90°.

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B), $\overline{AP}$ es mediana y BP = PC = AP = 10. Para calcular el área de ABC, deben hallarse las longitudes de AB y AC. Siendo AB = c y AC = b, el área resultará:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{b \times c}{2}$$

Como AB - AC = 4, entonces:

$c - b = 4$ ... (1)

Por el teorema de Pitágoras:

$c^2 + b^2 = 400$ ... (2)

Resolviendo el sistema y considerando que b y c son números positivos se obtiene b = 12 y c = 16.

Finalmente el área de la región triangular ABC será:

$$S_{(ABC)} = \frac{12 \times 16}{2} = 96\ \mu^2$$

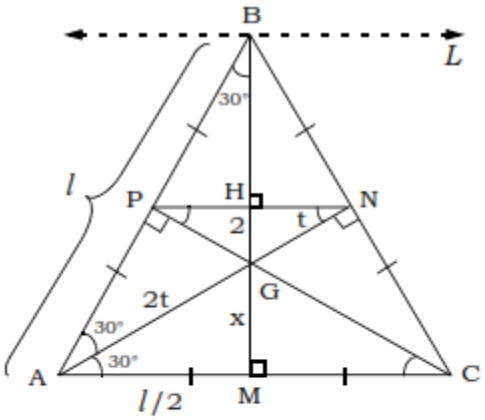
Como los triángulos ABP y APC tienen igual base y altura, sus áreas son iguales y el área de ABP (área incógnita) resulta igual a la mitad del área de ABC:

$$S_{\Delta ABP} = \frac{S_{\Delta ABC}}{2} = \frac{96}{2} = 48\ \mu^2$$

RESPUESTA: A

03.

En el triángulo equilátero ABC mostrado en la siguiente figura, el ortocentro G es a la vez baricentro y M, N y P son puntos medios de los lados $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$.



La distancia de G al segmento $\overline{PN}$ es GN = 2 (dato del problema)

Como AG = 2GN y los triángulos AGC y PNG son semejantes ($\overline{PN}//\overline{AC}$):

$$\frac{x}{2} = \frac{2t}{t} \quad x = 4 \quad GM = 4$$

Como P y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, H es punto medio de $\overline{BM}$ (Teorema de Thales, $L//\overline{PN}//\overline{AC}$).

Entonces:

BH = HM = 6 → BM = 12

Siendo "l" la longitud del lado del triángulo, se obtiene:
AB = l y AM = $l/2$ y en el triángulo ABM resulta:

$AB^2 = AM^2 + BM^2$

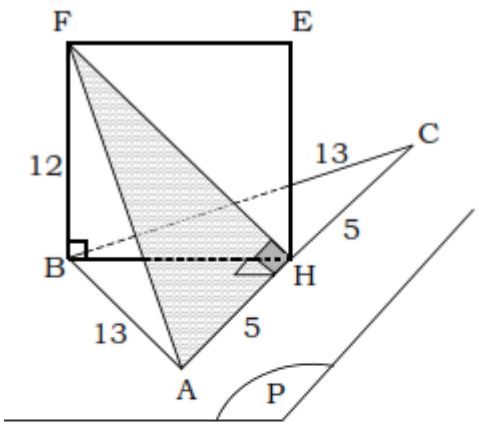
$$\rightarrow l^2 = \frac{l^2}{4} + 12^2 \rightarrow \frac{3l^2}{4} = 144$$

$$l^2 = 192 \rightarrow l = 8\sqrt{3}$$

RESPUESTA: E

04.

Se observa en la figura el cuadrado BHEF contenido en un plano perpendicular al plano que contiene al triángulo ABC (AB = AC = 13).



Para calcular el área de la región triangular FAH, deben hallarse las longitudes de $\overline{AH}$ (base) y $\overline{FH}$ (altura). Nótese que $\overline{FH}$ es perpendicular a $\overline{AC}$ por el teorema de las tres perpendiculares, ya que $\overline{FB}$ es perpendicular al plano P y $\overline{BH}$ lo es a $\overline{AC}$ ($\overline{AC} \subset P$).

Como AC = 12, AH = HC = 5 y por teorema de Pitágoras;

$BH = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, entonces:

BF = FE = EH = 12. Asimismo: $FH = 12\sqrt{2}$ (BFH es rectángulo isósceles).

Finalmente el área de AFH será:

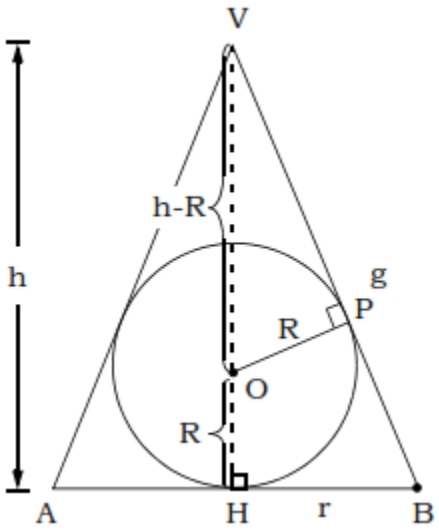
$$S = \frac{AH \times FH}{2} = \frac{5 \times 12\sqrt{2}}{2}$$

$$= 30\sqrt{2}\ m^2$$

RESPUESTA: C

05.

Denominamos con las letras , h y g a las longitudes del radio, la altura y la generatriz del cono y como R a la longitud del radio de la esfera.



Se pide hallar:

$$\frac{S_{T(C)}}{S_{ESF}} = \frac{\pi r^2 + \pi rg}{4\pi R^2} = \frac{r(r+g)}{4R^2} \quad (1)$$

Se sabe que:

$$\frac{V_C}{V_E} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 2 \rightarrow$$

$$4R^2 = \frac{r^2 h}{2R} \quad \ldots (2)$$

Como Δ V 0 P ~ Δ VHB:

$$\frac{R}{r} = \frac{h-R}{g}$$

Se deduce: $r(r+g) = \frac{r^2 h}{R}$ ... (3)

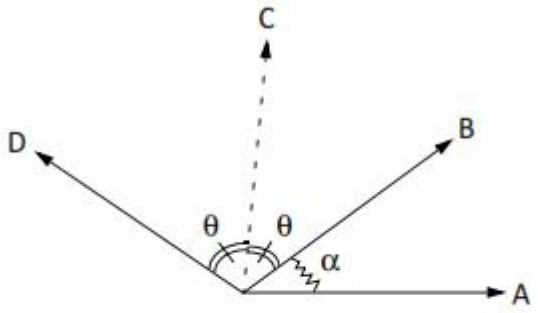
Reemplazando (2) y (3) en (1):

$$\frac{S_T(C)}{S(E)} = \frac{\frac{r^2 h}{R}}{\frac{r^2 h}{2R}} = 2$$

RESPUESTA: A

06.

Sean $\alpha = m\angle AOB$, $\theta = m\angle BOC = m\angle COD$.



De los datos,

$$\alpha + 2\theta + \alpha = 180°,$$

de donde $\alpha + \theta = 90°$, y

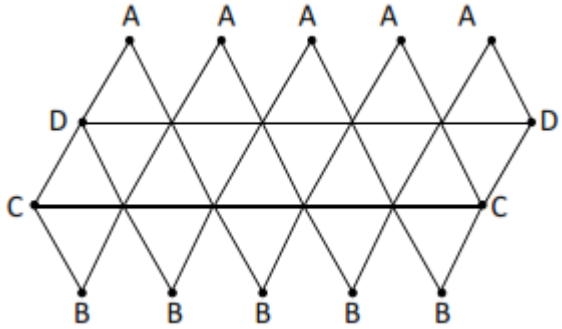
$$\alpha - \theta = 10°.$$

Luego $\alpha = 50°$, $\theta = 40°$ y $m\angle BOC = m\angle COD = 40°$.

RESPUESTA: C

07.

Desarrollamos el icosaedro como se indica en la figura, marcando con letras A, B, C y D vértices que se identifican en el ensamblado del icosaedro.



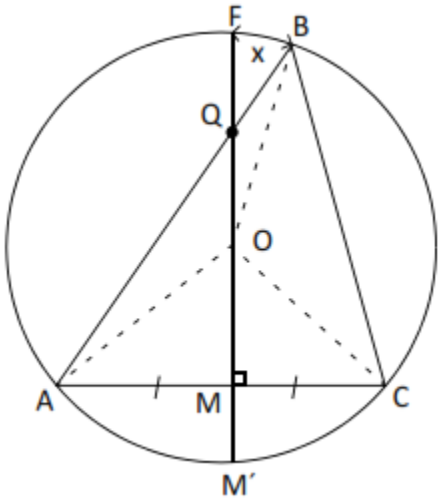
Luego contamos:

* 5 vértices en la parte superior que se identifican con uno solo (marcados con la letra A);
* 5 vértices en la parte inferior que se identifican con uno solo (marcados con la letra B);
* 12 vértices en la parte central, de los que dos pares se identifican (marcados con letras C y D), dando un total de 10 vértices.

Luego, el icosaedro posee en total 12 vértices.

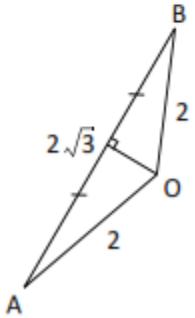
RESPUESTA: A

08.

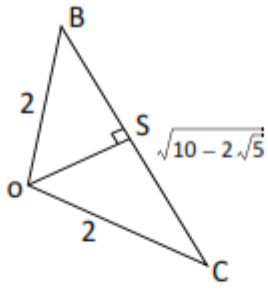


Sea x la medida solicitada.

Trazamos los radios $\overline{AO}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$, luego analizamos los triángulos AOB y BOC. Trazando la altura relativa a $\overline{AB}$ vemos que se tiene un triángulo notable, donde $m\angle ABO = 30°$.



Trazando la altura relativa a $\overline{BC}$, obtenemos triángulos rectángulos.



Aplicando el teorema de Pitágoras en ΔOSB, se obtiene $OS = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Esto nos dice que $m\angle OBS = 54°$.

En el triángulo ABC, tenemos

$$m\angle AOC = 60° + 108° = 168°;$$

luego $m\angle AOM = 84°$ y $m\overset{\frown}{AM} = 84°$. Además

$$\begin{aligned} m\angle AQM &= 90° - m\angle BAM \\ &= 90° - (30° + 6°) \\ &= 54°. \end{aligned}$$

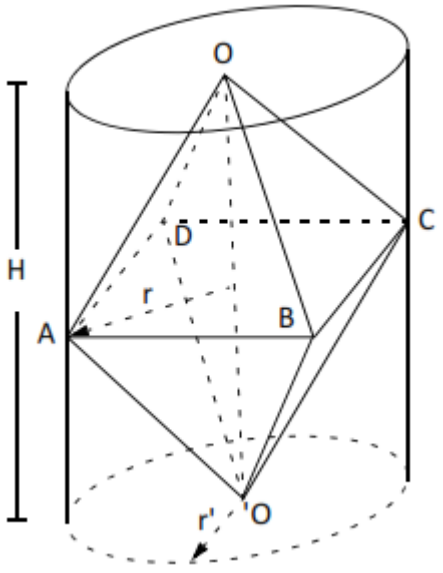
Por lo tanto,

$$54° = \frac{84° + x}{2},$$

de donde $x = 24°$.

RESPUESTA: C

09.



Sean los puntos A, B, C, D, O, O' como en la figura, r el radio del cilindro y H su altura. Como ABCD es un cuadrado (desde que el octaedro es regular)

$$r = \frac{AD}{\sqrt{2}}$$

y

$$\begin{aligned} H &= 2 \cdot OQ = 2\sqrt{AO^2 - r^2} \\ &= 2\sqrt{AD^2 - r^2} \end{aligned}$$

De estas expresiones, tenemos $H = AD \cdot \sqrt{2}$.

El volumen del octaedro es

$$V_{oct} = \frac{2}{3} AD^2 \cdot \frac{H}{2} = 100,$$

y $AD^2 = 2r^2$, luego

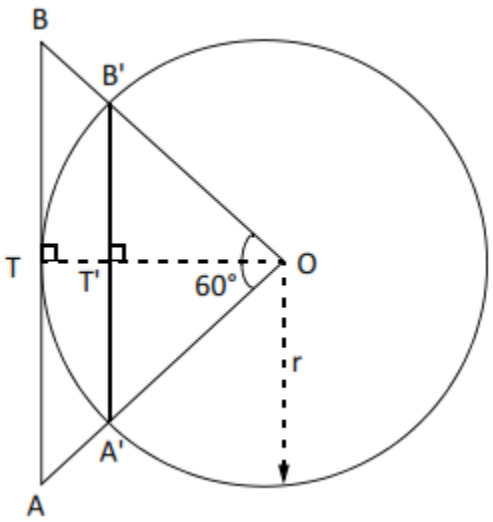
$$Hr^2 = 150.$$

Por lo tanto, el volumen del cilindro es

$$V_{cil} = \pi r^2 H = 150\pi \quad (cm3).$$

RESPUESTA: D

10.



Sea T punto de tangencia, A', B' como en la figura. Del triángulo OBT, recto en T tenemos que $BT = r\sqrt{3}$, de donde

$$AB = 2 \cdot BT = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Se tiene que $\overline{OT}$ corta $\overline{A'B}$ en T', luego el triángulo B'T'O es recto en T', de donde $B'T' = \frac{r}{2}$. Luego B'A' = r.

Se sigue que el perímetro del hexágono más grande es $P = 6 \cdot AB = 12r\sqrt{3}$, y el del más pequeño es $p = 6 \cdot A'B' = \frac{6r}{\sqrt{3}}$, de donde

$$\frac{P}{P} = \frac{6r}{12r/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

RESPUESTA: B